

ЛЕКЦИЯ: Сплайновая интерполяция в системах ЧПУ при обработке скульптурных поверхностей

Постановка задачи интерполяции Сложная интерполяция в системах ЧПУ Сплайн типа ASPLINE

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_i = Ax_i^3 + Bx_i^2 + Cx_i + D \\ y_{i+1} = Ax_{i+1}^3 + Bx_{i+1}^2 + Cx_{i+1} + D \\ 3Ax_i^2 + 2Bx_i + C = \frac{1}{d_{i-1} + d_i} \left(\frac{(y_i - y_{i-1})d_i}{d_{i-1}} + \frac{(y_{i+1} - y_i)d_{i-1}}{d_i} \right) \\ 3Ax_{i+1}^2 + 2Bx_{i+1} + C = \frac{1}{d_i + d_{i+1}} \left(\frac{(y_{i+1} - y_i)d_{i+1}}{d_i} + \frac{(y_{i+2} - y_{i+1})d_i}{d_{i+1}} \right) \end{cases}, \quad (2)$$

где $d_{i-1} = x_i - x_{i-1}$, $d_i = x_{i+1} - x_i$ и $d_{i+1} = x_{i+2} - x_{i+1}$.

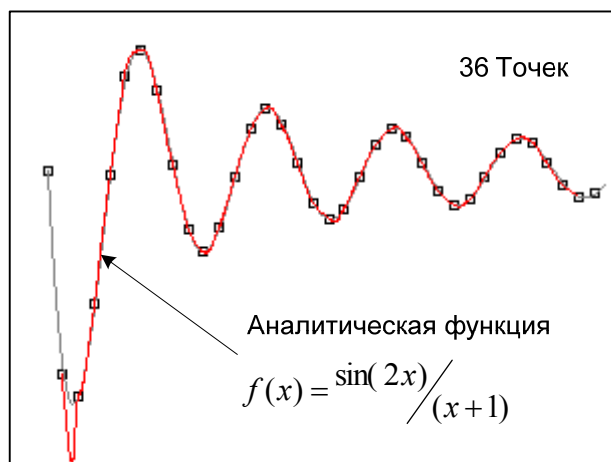
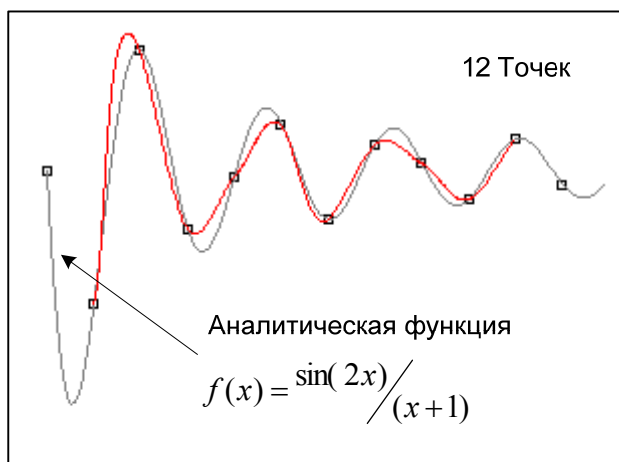


Рис. 1. Точность ASPLINE-сплайна в зависимости от числа заданных точек

CSPLINE-сплайны

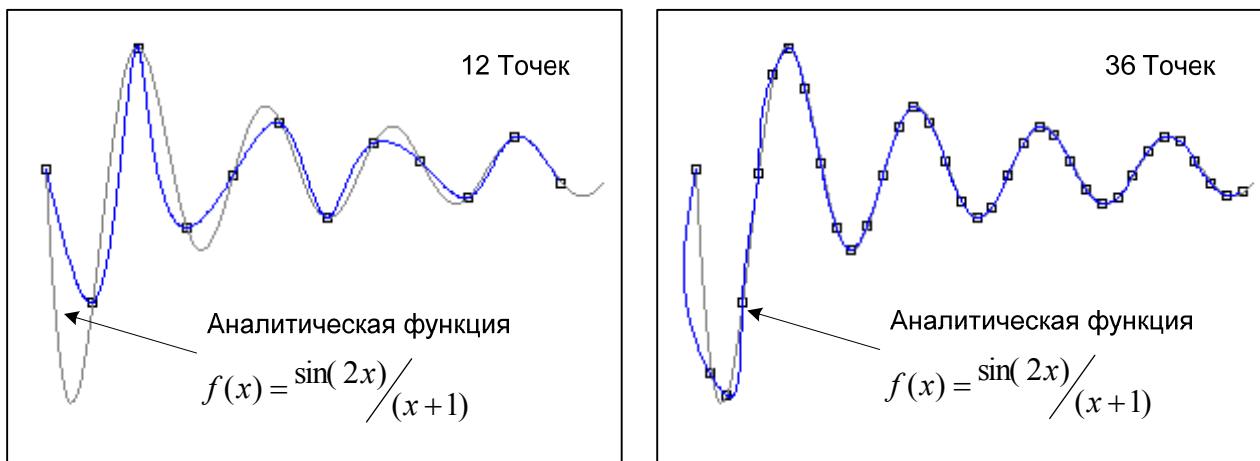


Рис. 2. CSPLINE (кубический сплайн)

$$S(f, x) = \sum_{k=0}^3 a_k^{(i)} (x_i - x)^k \quad (3)$$

$$S_i(x) = y_i(1-t)^2(1+2t) + y_{i+1}t^2(3-2t) + m_i h_i t(1-t)^2 - m_{i+1} t(1-t) \quad (4)$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$ и $t = \frac{x - x_i}{h_i}$.

$$\begin{cases} 2m_0 + \mu_0 m_1 = c_0, \\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = c_n, \end{cases} \quad (5)$$

где $c_i = 3(\mu_{i-1} \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}})$, $\mu_i = h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)^{-1}$, $\lambda_i = 1 - \mu_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\mu_0 = \lambda_n = 0$,
 $c_0 = 2f'_0$ и $c_n = 2f'_n$

NURBS-сплайны

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,p}(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) w_i}, \quad (5)$$

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t_i}{t_{i+k+1}-t_{i-1}} B_{i+1,k-1}(t) \quad \text{где } 1 \leq k \leq p \quad (6)$$

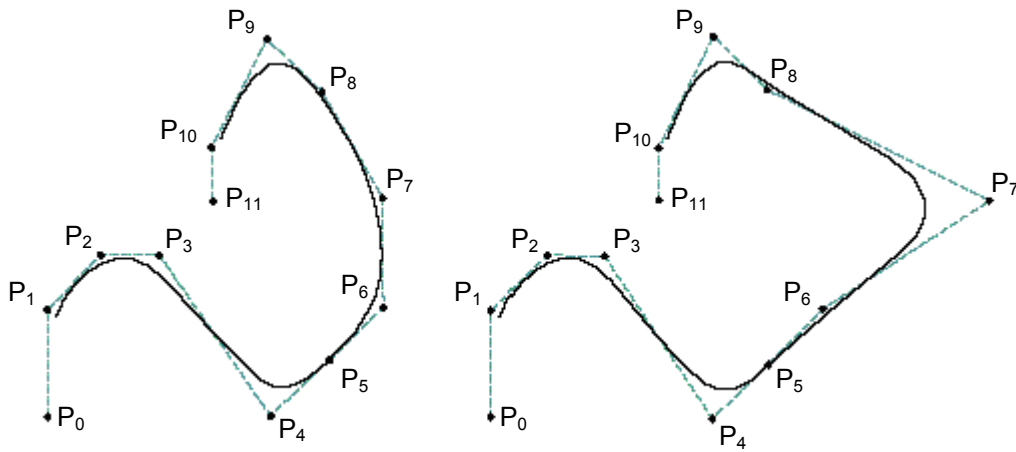


Рис. 3. Влияние положения управляющих точек на формирование NURBS-сплайна.

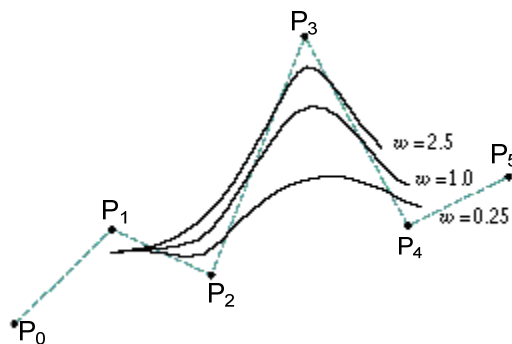


Рис. 4. Влияние веса управляющей точки на "притяжение" кривой.

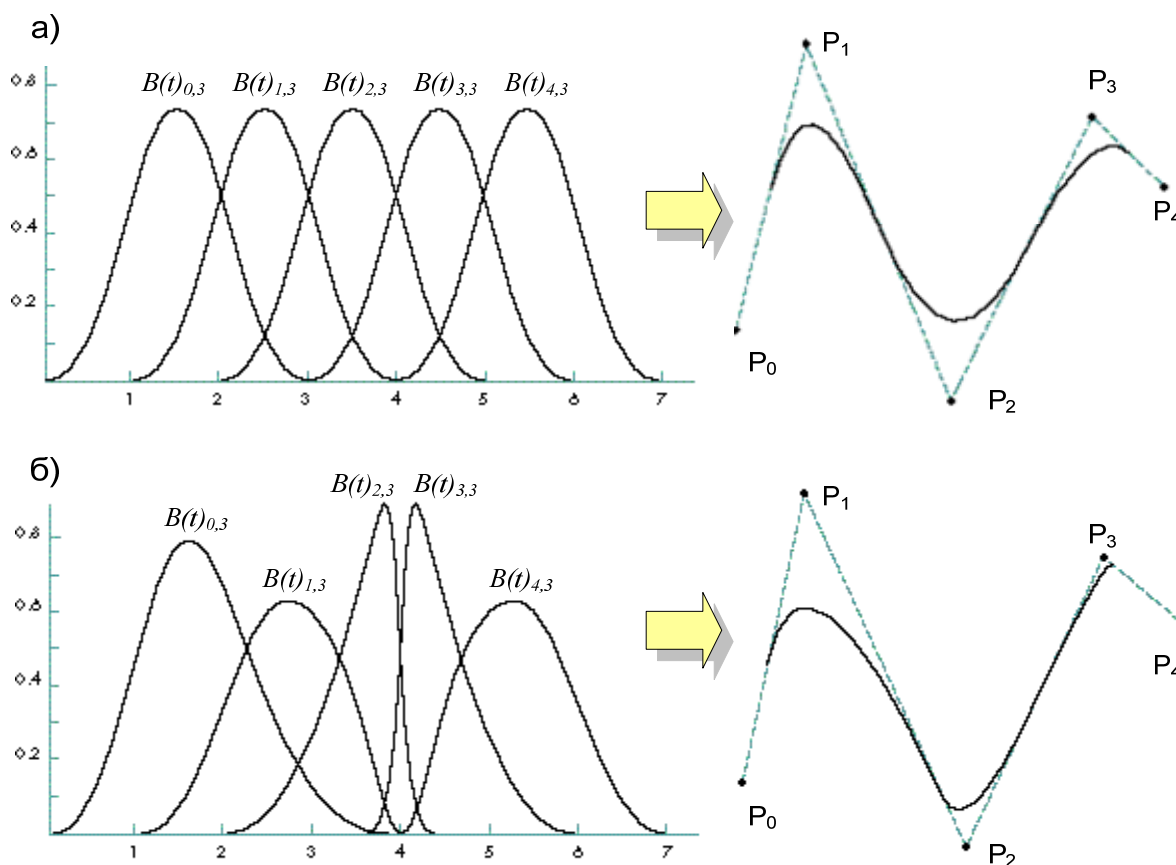


Рис. 5. Базовые функции для множества контрольных точек и NURBS-кривая для векторов узлов: а) Однородное распределение вектора узлов; б) Неоднородное распределение вектора узлов.

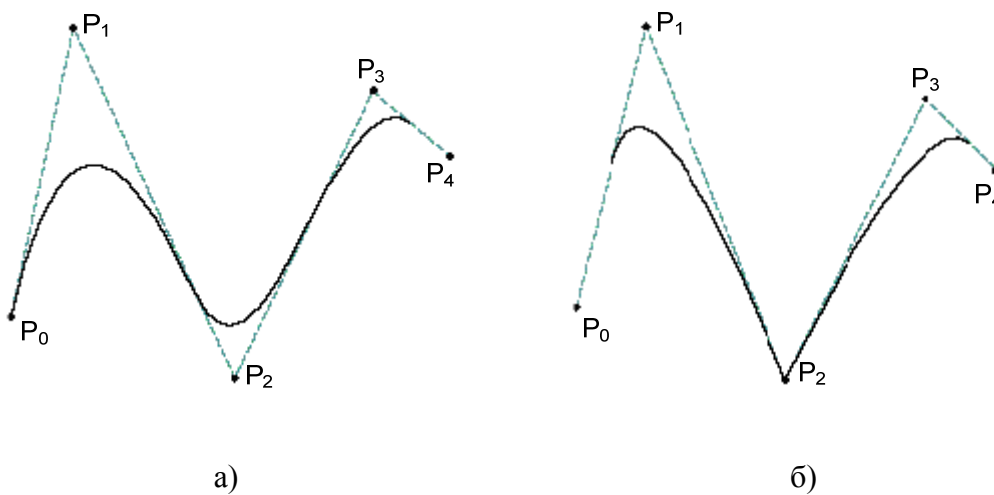


Рис. 5. Влияние вектора узлов на форму кривой

Сплайн-программирование в системах ЧПУ

Таблица 1. Применение сплайнов в системах ЧПУ

№	Системы ЧПУ	Тип сплайновая интерполяции	Максимальное количество осей	Способ задания
1)	ACD CNC-System	CSPLINE, B-Spline, ASPLINE		
2)	Allen Bradley	CSPLINE		
3)	Andronic 2060	ASPLINE	16	G30, язык Anlog C
4)	Delta Tau ADV810Q, PMAC	CSPLINE, NURBS		G1.1
5)	D.Electron CNC Z32.NET	NURBS	3	
6)	Fagor 8070CNC	CSPLINE, ASPLINE, полином		
7)	FANUC 18i	NURBS		G06.2
8)	HEIDENHAIN iTNC 530	CSPLINE	5	SPL
9)	MachineMate CNC, PA 8000	CSPLINE	5	G005, G006, M070, M071, M072, M073
10)	Mitsubishi	NURBS		
11)	NUM 1080 CNC	CSPLINE, NURBS, полином	9	G06, G48, G49, G104
12)	Okuma	SuperNURBS		
13)	Siemens Sinumerik 840D	NURBS, CSPLINE, ASPLINE, полином	8	ASPLINE, SPLINE, BSPLINE, POLY
14)	TwinCAT CNC	BSPLINE, CSPLINE		
15)	WinPCNC v.3	CSPLINE	3	G07, G08, G30

Пример для HEIDENHAIN iTCN 530.

$$X(t) = K_3 X \cdot t^3 + K_2 X \cdot t^2 + K_1 X \cdot t + X$$

$$Y(t) = K_3 Y \cdot t^3 + K_2 Y \cdot t^2 + K_1 Y \cdot t + Y$$

```

7 L X+28.338 Y+19.385 Z-0.5 FMAX ;Spline starting point

8 SPL X24.875 Y15.924 Z-0.5 ;Spline end point
K3X-4.688E-002 K2X2.459E-002 K1X3.486E+000
K3Y-4.563E-002 K2Y2.155E-002 K1Y3.486E+000 F10000

9 SPL X17.952 Y9.003 Z-0.500 ;Spline end point
K3X5.159E-002 K2X-5.644E-002 K1X6.928E+000
K3Y3.753E-002 K2Y-2.644E-002 K1Y6.910E+000

10 ...
    
```

Примеры формата кадров для NURBS и CSPLINE-интерполяции в системе ЧПУ фирмы Siemens:

```
;NURBS example
N10 G1 X0 Y0 F300 G64
N20 BSPLINE
N30 X10 Y20 PW=2           ; PW- вес
N40 X20 Y40
N50 X30 Y30 PW=0.5
N60 X40 Y45
N70 X50 Y0
```

```
;Cubic spline example
N10 CSPLINE X20 Y10
N20 X30
N30 X40 Y5
N40 X50 Y15
N50 X55 Y7
N60 X60 Y20
N70 X65 Y20
N80 X70 Y0
N90 X80 Y10
N100 X90 Y0
```

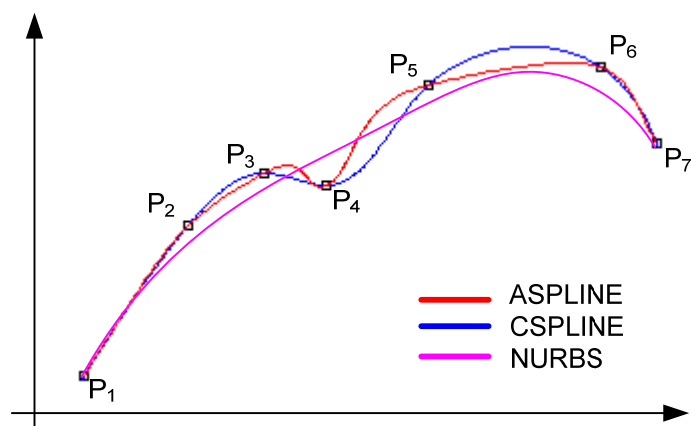


Рис. 6. Использование параметрических сплайнов при интерполяции.

Постпроцессирование сплайн-контуров

Файл Unigraphics до постпроцессирования

```
GOTO/-1.6953,-0.7500,-0.2358
NURBS/
KNOT/0.0312500,0.0781250
...
KNOT/0.8750000,0.9062500,0.9687500,1.0000000
CNTRL/-1.6544,-0.7500,-0.2313
CNTRL/-1.5752,-0.7500,-0.2225
CNTRL/-1.4053,-0.7500,-0.2067
...
CNTRL/1.6138,-0.7500,-0.2263
CNTRL/1.7085,-0.7500,-0.2373
CNTRL/1.7500,-0.7500,-0.2421
```

Fanuc постпроцессор:

```
N0000 G05 P10000; (Start high-precision contour control mode)
N0010 G06.2 P4 K0. X-1.6953 Y-.75 Z-.2358 F10. ;
N0020 K0. X-1.6544 Z-.2313 ;
N0030 K0. X-1.5752 Z-.2225 ;
N0040 K0. X-1.4053 Z-.2067 ;
N0050 K.0313 X-1.3031 Z-.1982 ;
N0060 K.0781 X-1.1215 Z-.1847 ;
...
N0220 K.875 X1.6138 Z-.2263 ;
N0230 K.9063 X1.7085 Z-.2373 ;
N0240 K.9688 X1.75 Z-.2421 ;
N0250 K1. ;
N0260 K1. ;
N0270 K1. ;
N0280 K1. ;
N0390 G01 Y-.7188 Z-.238 ; (NURBS interpolation end)

G05 P0 ; (End high-precision contour control mode)
```

Siemens постпроцессор:

```
N0000 X-1.6953 Z-.2358
N0010 BSPLINE SD=3 PL=0. X-1.6544 Y-.75 Z-.2313 F10.
N0020 PL=.0313 X-1.5752 Z-.2225
N0030 PL=.0469 X-1.4053 Z-.2067
N0040 PL=.0469 X-1.3031 Z-.1982
N0050 PL=.0313 X-1.1215 Z-.1847
...
N0210 PL=.0625 X1.6138 Z-.2263
N0220 PL=.0313 X1.7085 Z-.2373
N0230 PL=0. X1.75 Z-.2421
```

Достоинства сплайновой интерполяции

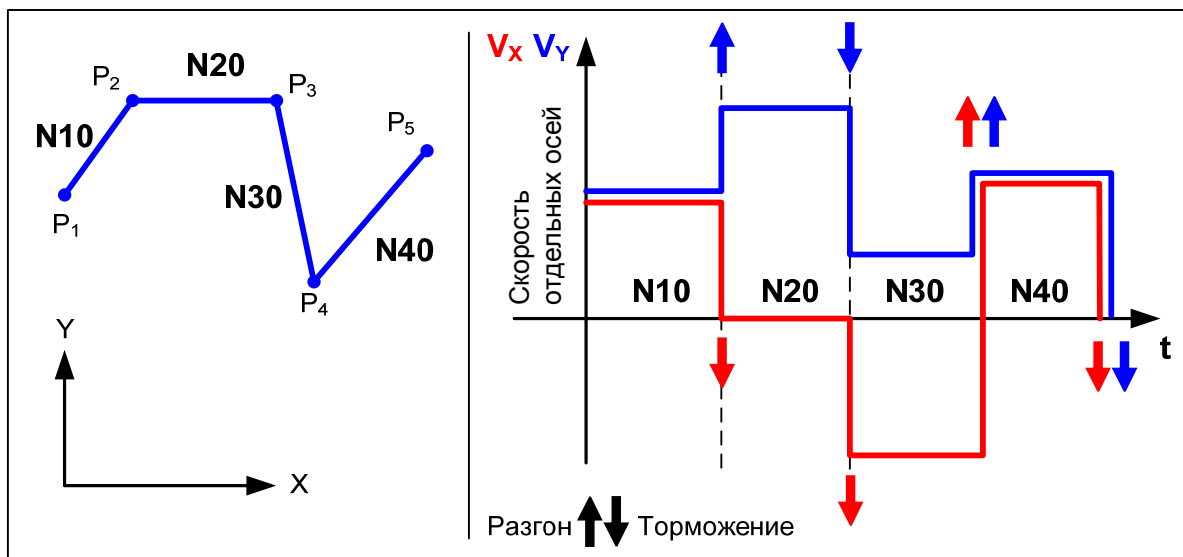


Рис. 7. Характер движения при линейной аппроксимации контура.

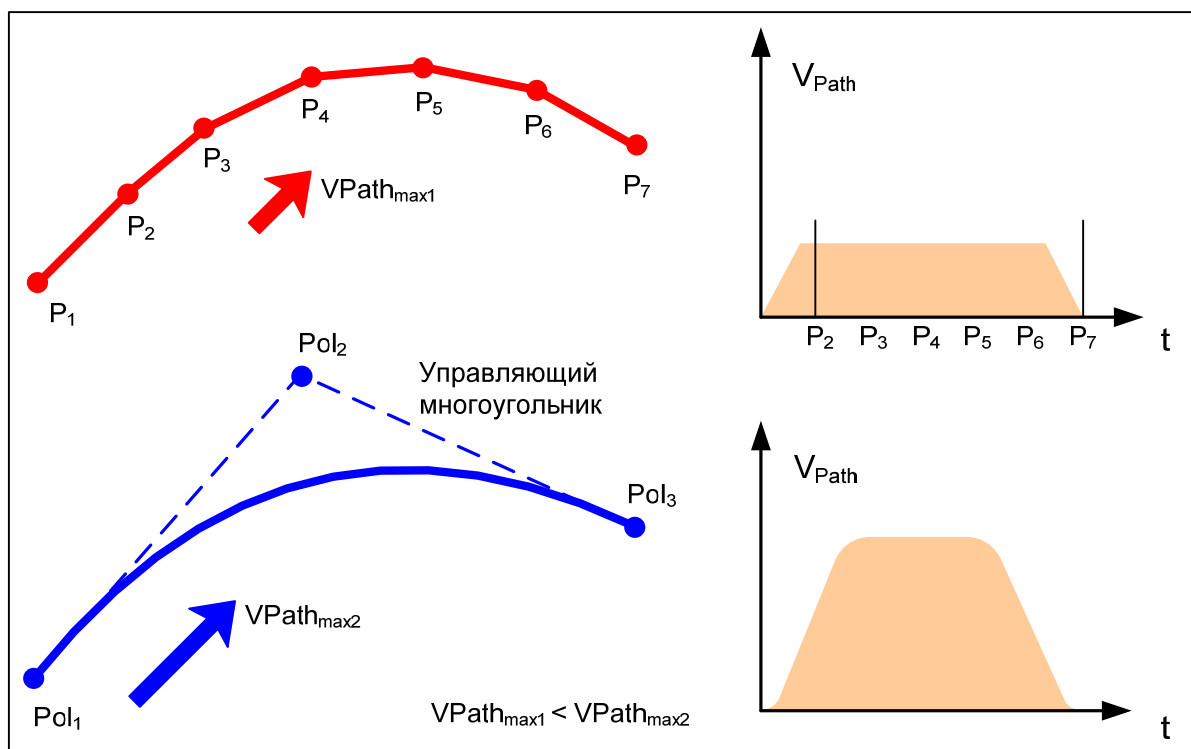


Рис. 8. Повышение производительности при сплайновой интерполяции.

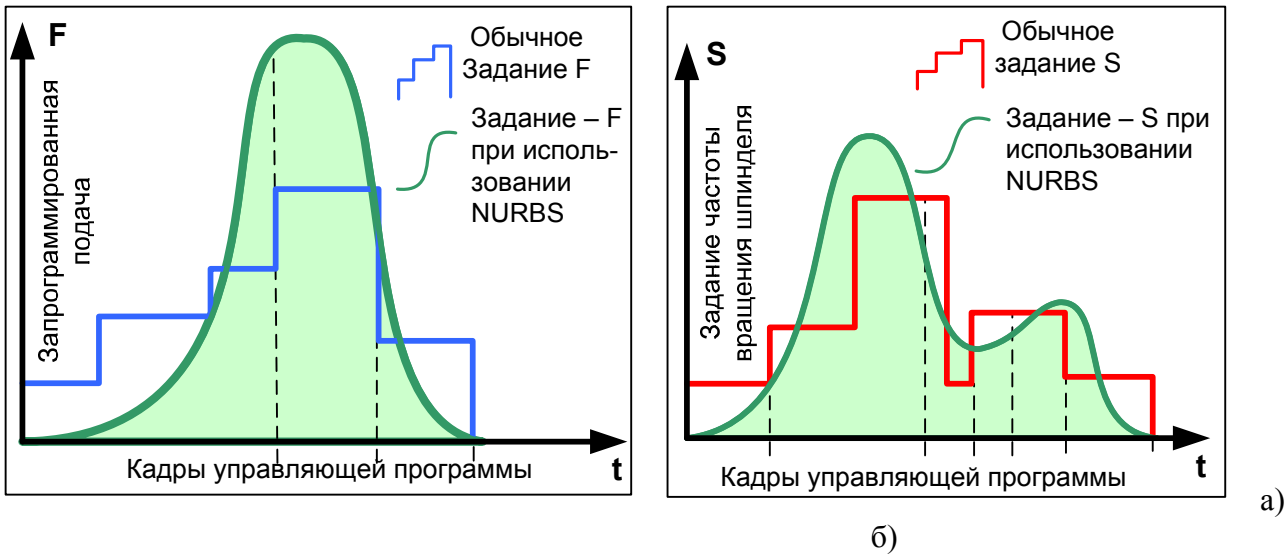


Рис. 9. Постоянные условия резания: а) при использовании NURBS и смене подачи; б) при смене оборотов и использовании NURBS.

Сглаживание линейного контура

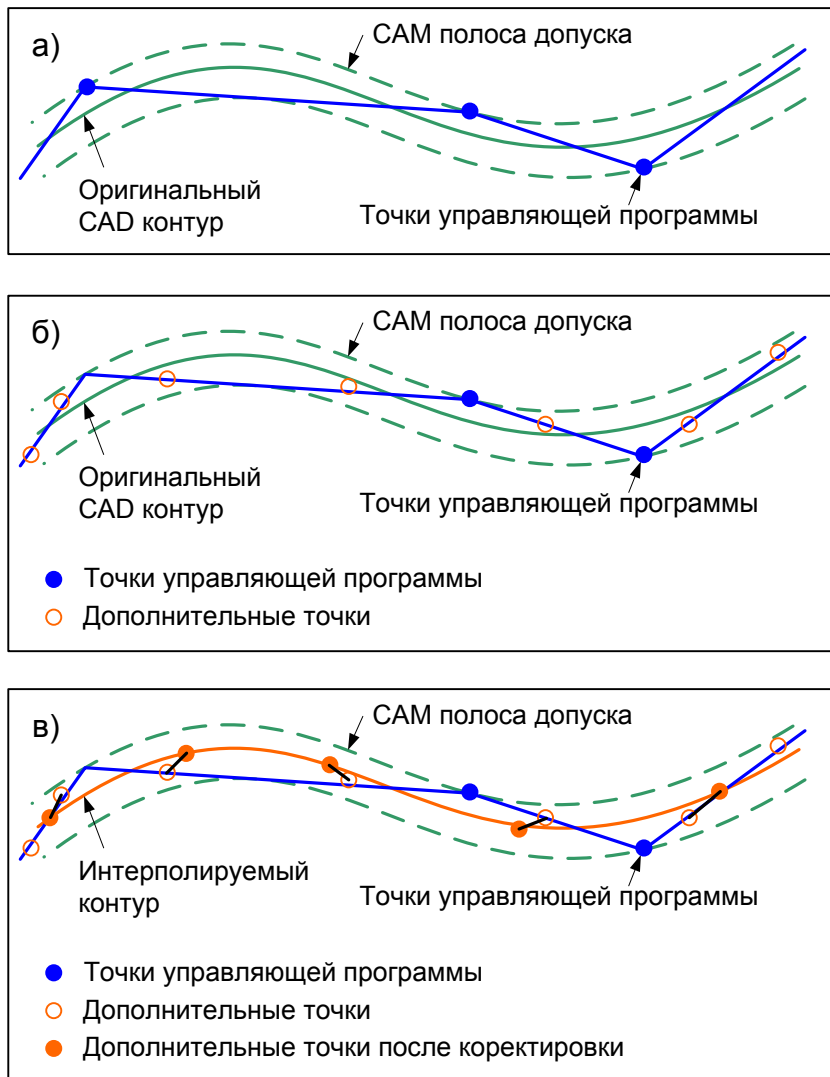


Рис. 10. Принцип нано-сглаживания.

```

G05 P10000 ;
...
G91 ;
G05.1 Q2 X0 Y0 Z0 ;
N01 G01 X1000 Z-300 ;
N02 X1000 Z-200 ;
N03 X1000 Z-50 ;
N04 X1000 Z50 ;
N05 X1000 Z50 ;
N06 X1000 Z-25 ;
N07 X1000 Z-175 ;
N08 X1000 Z-350 ;
N08 X1000 Z-350 ;
N09 Y1000 ;
N10 X-1000 Z350 ;
N11 X-1000 Z175 ;
N12 X-1000 Z25 ;
N13 X-1000 Z-50 ;
N14 X-1000 Z-50 ;
N15 X-1000 Z50 ;
N16 X-1000 Z200 ;
N17 X-1000 Z300 ;
G05.1 Q0 ;
...
G05 P0 ;
    
```

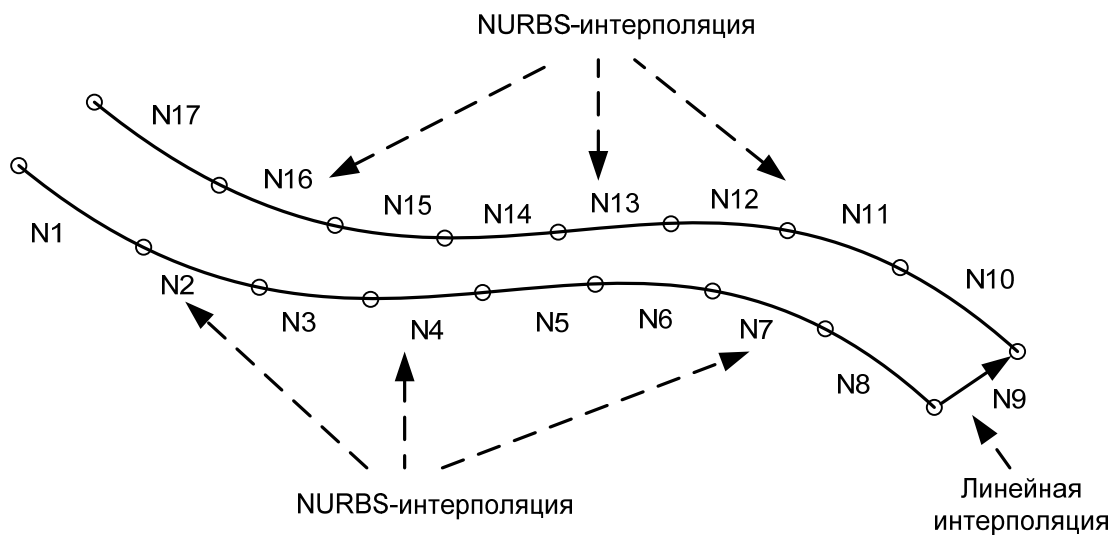


Рис. 11. Нано-сглаживания контура для приведенного примера системы FANUC

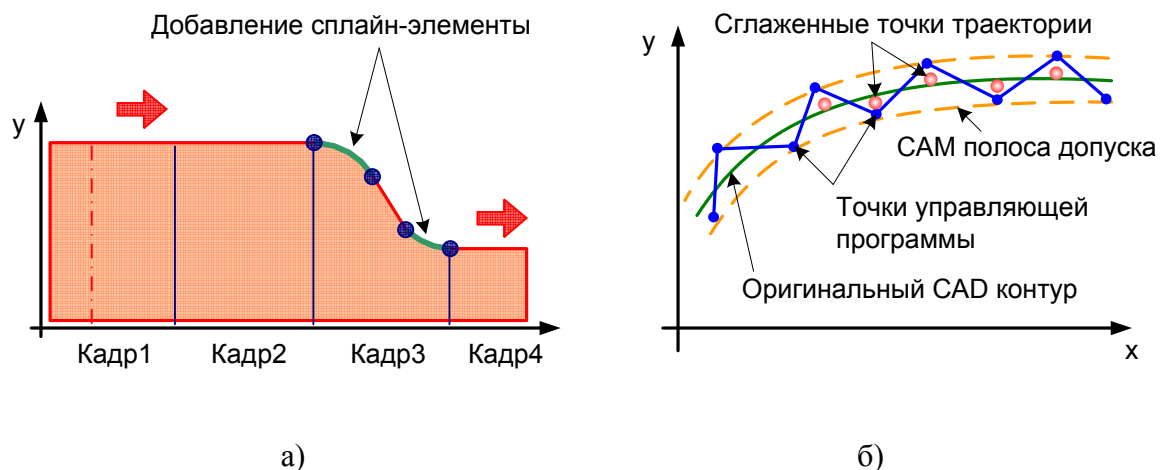


Рис. 12. Комбинация решения look-ahead smooth с «компрессором COMPCAD»:
а) Автоматическое добавление сглаживающих сплайн-элементов с помощью G642;
б) Сглаживание ошибки геометрии (траектории) посредством COMPCAD

```
G00 X30 Y6 Z40
G1 F10000 G642
SOFT
COMPCAD ; Compressor interface optimization ON
STOPFIFO
N24050 Z32.499
N24051 X41.365 Z32.500
N24052 X43.115 Z32.497
N24053 X43.365 Z32.477
N24054 X43.556 Z32.449
N24055 X43.818 Z32.387
N24056 X44.076 Z32.300
...
COMPOF ; Compressor OFF
G00 Z50
M30
```

Результаты практического использования технологии NURBS

По данным фирмы Siemens

	Объем данных	Время обработки
Аппроксимация сложных кривых прямолинейными участками	1 720Кб	28:05 минут
Использование технологии NURBS	702Кб	16:58 минут
Сокращение	на 60%	на 40%

	Линейная интерполяция	NURBS-интерполяция
Обрабатывающий центр	40 HRC PX5 Steel Makino A66 с GE Fanuc ЧПУ	
Получистовая обработка		
Подача (Speed Tool)	15 000 об/мин Концевая фреза со сферическим концом, диаметром 0.375 inch, покрытие TiCN (нитрид карбида титана).	
Тип интерполяции	Линейная	NURBS
Размер данных (Program Size)	0.96 MB	0.95 MB
Время обработки	7 минут	6 минут
Чистовая обработка		
Подача	20 000 об/мин Концевая фреза со сферическим концом, диаметром 0.25 inch, покрытие TiCN	
Тип интерполяции	Линейная, с допуском 40 microinch	NURBS
Размер данных	45.5 MB	31.8 MB
Время обработки	293 минут	247 минут

Дополнительная литература:

1. Hiroshi Akima "A Method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Irregularly Distributed Data Points", *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 4, No. 2, June 1978, pp. 148-159. Copyright 1978, Association for Computing Machinery, Inc., reprinted by permission.
2. Методы сплайн-функций. Завялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.-М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
3. Schneider P.J. NURB Curves: A Guide for the Uninitiated// develop, *The Apple Technical Journal*. N25, March 1996. <http://devworld.apple.com/dev/techsupport/develop/issue25/schneider.html>
4. Tom Beard Interpolating Curves. *MMS Online*, <http://www.mmsonline.com/articles/109704.html>
5. Peter Zelinski Understanding NURBS Interpolation. *MMS Online*, <http://www.mmsonline.com/articles/079901.html>
6. Brownhill Mark, An alternative view: nano smoothing NURBS curves for best fit // *Tooling & Production*. 3/1/2005; http://www.manufacturingcenter.com/tooling/archives/0305/0305alternative_view.asp
7. Что такое сплайн? (NURBS, ASPLINE, BSPLINE). <http://automation-drives.ru/mc/archive/press/index.php>